宍道湖の流れ解析

2011年5月15日　　　　　　　　　　　　　　　　　西村　二郎

1. 長方形モデル

宍道湖は面積 81.8 m^2、最大深度 6.4 m、平均深さ 4.5 m、貯水量 366×10^6 m^3、滞留時間 0.3年の汽水湖である。図・1から分かるように、主な流入路は斐伊川、流出路は大橋川である。ここでは宍道湖を図・2のような長方形とみなすことにする。

第1図　宍道湖

第2図　長方形モデル

図・1から明らかなように、斐伊川、大橋川ともに川幅は湖の短辺の幅に幅に比して極めて狭い。そこで、ここでは、川幅を無視して、斐伊川（河口）を湖水の集中的な湧出点、、大橋川を吸入点とする。このような仮定は、流れの淀みを過大評価する側にはたらく。

流入（出）量は、貯水量と滞留時間から計算すれば、$1.39 \times 10^5 m^3/hr$ となる。

滞留時間から分かるように、宍道湖の水流は豊富である。しかし、中央部では速く、湖岸付近では遅くなっていると思われる。この解析の目的はその辺りの事情を大まかに掴むことにある。

ここで、数学的取扱いの都合上、湖水の流入(出)点の位置は、$14.30km \times 5.72km$ とみなした宍道湖の短辺の中央にあるものとする(図・2参照)。

2. 数学的取扱いの概要

宍道湖は相対的に水深が浅く(湖水面積を$1m^2$ とすると、平均深さは $0.5mm$)最大深度($0.7mm$)との差も小さい。また、湖の大きさを考慮に入れれば、水の粘性の影響は無視できる。渦もない。さらに風の影響を無視することにすれば、宍道湖の流れは二次元のポテンシャル流とみなすことができる。

ここで、長方形の中心(→湖心に対応している)を原点とする $x-y$ 座標を考え、速度 ポテンシャルを $\phi(x、y)$、流速ベクトルを$\boldsymbol{v}(u、v)$とすると、

$$\Delta\phi = 0 \cdots (1)、$$

$$\boldsymbol{v} = grad\,\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}、\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \cdots (2)、$$ である。

境界条件: $$u(\pm a、y) = q\cdot\delta\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cdots (3)、$$

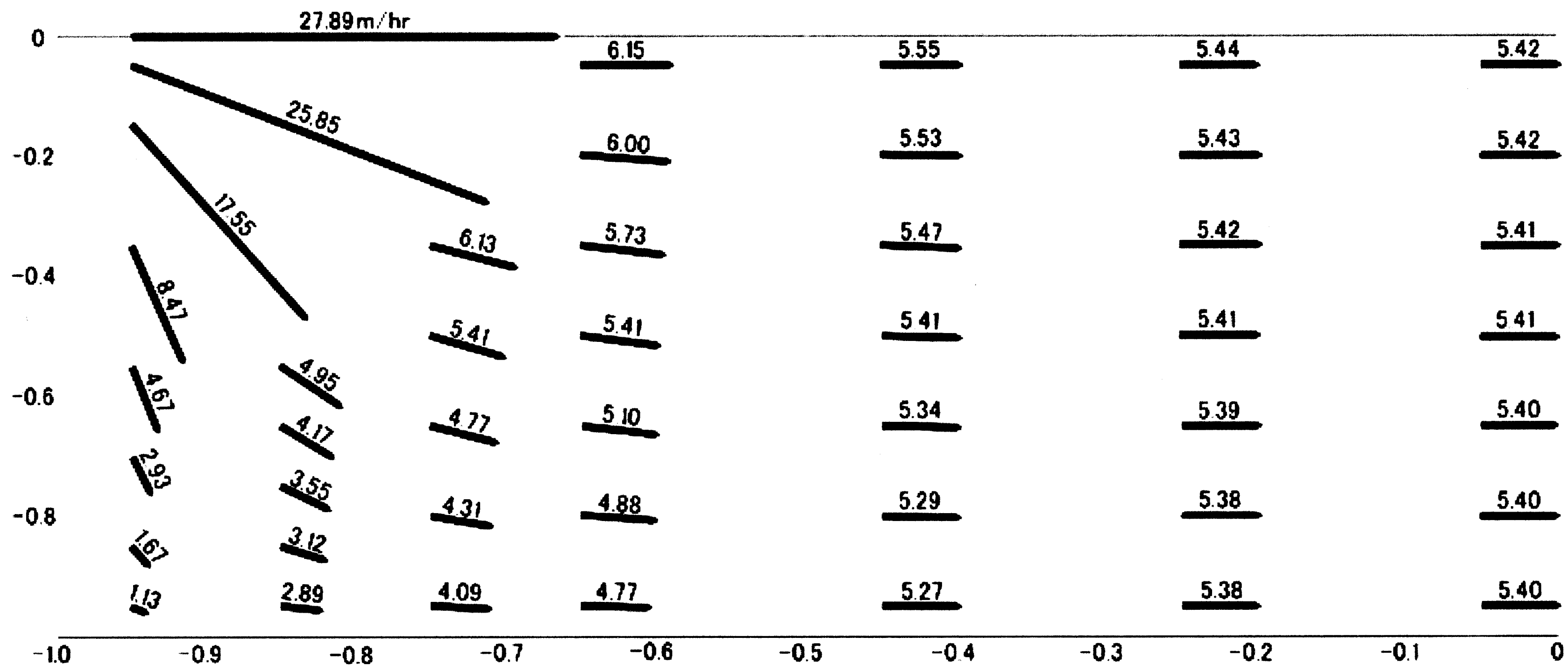
$$v(x、\pm b) = 0 \cdots (4).$$

ただし、$\delta(y)$ はデルタ関数であり、区間$(-b、b)$で積分すれば 1 となる。q は宍道湖の平均深さを c とすれば、流入(出)量を(Q) との間に次の関係がある。

$$q = \frac{Q}{2bc} \cdots (5).$$

解法は Appendix に譲るとして、得られた流速の速度分布を視覚的に表せば、図・3のようになる。対象性があるので、$x-y$ 座標系の第三象限(図・2の左下四半分)のみ表示した。黒い矢印は、矢印の起点における流速ベクトルの大きさを図示したものである。もちろん、矢印の長さはベクトルの大きさに比例させてある。

第3 図から明らかなように、流れは、四隅を除いて、流入点からすみやかに両岸の方へと広がっている。


27.89m/hr
25.85
17.55
8.47
4.67
2.93
1.67
1.13
4.95
4.17
3.55
3.12
2.89
6.13
5.41
4.77
4.31
4.09
6.15
6.00
5.73
5.41
5.10
4.88
4.77
5.55
5.53
5.47
5.41
5.34
5.29
5.27
5.44
5.43
5.42
5.41
5.39
5.38
5.38
5.42
5.42
5.41
5.41
5.40
5.40
5.40
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0

第３図　流速分布

(Appendix)長方形モデルの解析解

1. 長方形モデル

宍道湖は面積81.8km^2、周囲45km、平均深さ4.5mの湖である。これを長方形とみなし、その中心を原点、長辺方向を x 軸、短辺方向を y 軸とする座標系を考える。

$-a \leqq x \leqq a$、$-b \leqq y \leqq b$ である。

2. 速度ポテンシャルと流速

速度ポテンシャル ϕ、流速 $(u、v)$ に関して次式が成立つ。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \cdots (1).$$

変数分離により(1)式を解けば次式が得られる。

$$\phi \rightarrow sinh\frac{k\pi x}{b} \cdot cos\frac{k\pi y}{b} + \alpha x \quad \cdots (2).$$

$$u = q \cdot \sum_1^\infty A_k cosh\frac{k\pi x}{b} \cdot cos\frac{k\pi y}{b} + \alpha q \cdots (3a)、$$

$$v = -q \cdot \sum_1^\infty A_k sinh\frac{k\pi x}{b} \cdot sin\frac{k\pi y}{b} \cdots (3b).$$

境界条件：

$$u(\pm a、y) = q \cdot \sum_1^\infty A_k cosh\frac{k\pi a}{b} \cdot cos\frac{k\pi y}{b} = q\,\delta(y) \cdots (4).$$

ただし、$\delta(y)$ はデルタ関数である。

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty cos\frac{k\pi y}{b} \cdots (5)、$$ と表示することができるから、

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\ ;\ A_k = \frac{1}{\pi} \cdots (6)、$$ となる。また、定数 q は流量 Q との間に

次の関係がある。なお、c は宍道湖の平均深さである。

$$Q = c\int_{-b}^{b} u(\pm a、y)\,dy = \frac{bc}{2\pi}q\ ;\ q = \frac{2\pi}{bc}Q \cdots (7).$$

結局(u、v)は次のように表示される。

$$u(x、y) = \frac{Q}{bc} + \frac{2Q}{bc} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{\cosh\frac{k\pi x}{b}}{\cosh\frac{k\pi a}{b}} \cdot \cos\frac{k\pi y}{b} \quad \cdots \text{(8a)、}$$

$$v(x、y) = -\frac{2Q}{bc} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{\sinh\frac{k\pi x}{b}}{\cosh\frac{k\pi a}{b}} \cdot \sin\frac{k\pi y}{b} \quad \cdots \text{(8b).}$$

流速成分 v は次のようになっている。

$v(x、\pm b) = 0 \cdots$ (9)、

$v(0、y) = 0 \cdots$ (10)、

$$v(\pm a、y) = \frac{2Q}{bc} \cdot \sum_{1}^{\infty} \tanh\frac{k\pi a}{b} \cdot \sin\frac{k\pi y}{b} \fallingdotseq \frac{2Q}{bc} \cdot \sum_{1}^{\infty} \sin\frac{k\pi y}{b} \quad \cdots \text{(11).}$$

流入(出)端の境界条件を集中的な流れ(つまりデルタ関数)とせず幅をもたせて(つまりステップ関数)表示して解くことも可能である。その場合、$x = \pm a$ 付近における解(級数)の収斂性がデルタ関数を使った場合に比べて悪いので、ここでは、採用しなかった。幅を持たせることは長方形の四隅に発生する淀み(流速の小さい部分)を緩和させる方向にはたらく。

以上

(参考) $2a$ = 14.30km ; $2b$ = 5.72km ; c = 4.5m ; 2ℓ = 170m ; $Q = 1220 \times 10^6\ \mathrm{m^3/Y}$

$\frac{a}{b} = 2.50$; $\frac{\ell}{b} = 0.03728$; $Q = 1.392 \times 10^5\ \mathrm{m^3/hr}$; q = 33.98 m/hr